DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

I

1° Trouver toutes les fonctions $\theta \to u(\theta)$ solutions de l'équation différentielle :

$$(E_0) \qquad 2u' - 2u^2 - 1 = 0$$

2° Trouver les solutions $\theta \to f(\theta)$ de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad 2ff'' - 4f'^2 - f^2 = 0$$

en utilisant les deux méthodes suivantes :

a. En effectuant le changement de fonction inconnue défini par

$$u = \frac{f'}{f}$$

b. Grâce au changement de fonction inconnue :

$$v = \frac{1}{f}$$

3° Trouver celle des solutions de (E) qui vérifie les conditions :

$$f(0) = \frac{k}{\cos\alpha} \quad ; \quad f'(0) = -\frac{k}{\sqrt{2}}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

où k et α sont deux nombres réels donnés.

II

Un plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i_1}, \vec{i_2})$, d'axes Ox , Oy.

A tout couple (α, λ) de nombres réels donnés, on associe la fonction définie sur **R** par :

$$\theta \to f_{\alpha,\lambda}(\theta) = \frac{\lambda}{\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)}$$

et la courbe plane $C_{\alpha,\lambda}$ définie par le paramétrage:

$$\theta \to M = f_{\alpha,\lambda}(\theta)\,(\cos\theta \,.\, i_1 + \sin\theta \,.\, i_2)$$

(encore appelée « courbe d'équation polaire » $\rho = f_{\alpha,\lambda}(\theta)$ où ρ et θ sont les coordonnées polaires de M).

1° (α, λ) et (α', λ') étant deux couples de nombres réels, par quelle transformation la courbe $C_{\alpha',\lambda'}$, se déduit-elle de la courbe $C_{\alpha,\lambda}$?

2° *a.* Étudier les variations de la fonction :

$$\theta \to f_{0,1}(\theta)$$

b. C désignant la portion de la courbe $C_{0,1}$ parcourue par M lorsque θ parcourt l'intervalle $[-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}]$, étudier ses branches infinies.

c. Calculer quelques points de C, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points; construire C en prenant comme unité de longueur sur le support de $\overrightarrow{OM}$, 5 cm.

3° Préciser les points doubles de C.

4° Calculer, dans le repère O, $\vec{k_1}$, $\vec{k_2}$ défini par :

$$\vec{k_1} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{i_2}\,; \qquad k_2 = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{i_2},$$

les coordonnées du centre de courbure I au point M de C d'angle polaire θ. En déduire le cercle osculateur à la courbe au point d'angle polaire 0.

.../...

E.N.S.I. M

1976 -91-

5° Évaluer la mesure de l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ lorsque θ parcourt l'intervalle $[0, \theta_0]$, où $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right[$ (unité d'aire : 1 cm²). Même question lorsque θ parcourt l'intervalle $\left[\theta_1, \pi\sqrt{2}\right]$ où $\theta_1 \in \left]\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \pi\sqrt{2}\right[$.

En déduire l'aire du triangle curviligne dont les sommets sont les points doubles de C, et les côtés les arcs de C ayant pour extrémités deux de ces points.

III

L'espace affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé $O, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$, d'axes OX, OY, OZ, on désigne par S l'ensemble des points M dont les coordonnées X, Y, Z vérifient les relations :

$$X \geqslant 0 ; \qquad Z \geqslant 0 ; \qquad Y^2 = 2XZ$$

1° ξ étant un nombre réel donné appartenant à l'intervalle]0,1], quelle est l'intersection de la surface S et du plan d'équation $X = \xi$?

2° Calculer le volume du solide limité par S, le plan d'équation $X = Z$ et le plan d'équation $X = 1$.

3° L'étude de la surface S se poursuivra désormais dans le repère $O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, d'axes Ox, Oy, Oz défini par :

$$\vec{i}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{j}_1 - \vec{j}_3\right) \quad ; \quad \vec{i}_2 = \vec{j}_2 \quad ; \quad \vec{i}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{j}_1 + \vec{j}_3\right)$$

Montrer que S est un cône de révolution dont on précisera le sommet, l'axe et l'ouverture, et que ce cône admet le paramétrage G ainsi défini :

$$\forall (\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times]-\pi, +\pi],$$
$$M = G(\rho, \theta) = \rho \cos\theta\, i_1 + \rho \sin\theta\, i_2 + \rho\, i_3$$

On interprétera géométriquement les paramètres ρ et θ.

4° f étant une fonction numérique continue, à valeurs positives, dérivable sur un intervalle ouvert A donné de **R**, on associe à tout $\theta \in A$ le point M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{OM} = f(\theta)\ (\cos\theta\, \vec{i}_1 + \sin\theta\, \vec{i}_2 + \vec{i}_3).$$

Montrer que, lorsque θ parcourt A, M parcourt une courbe γ sur S.

Calculer les dérivées :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}$$

en fonction de θ, $f(\theta)$, $f'(\theta)$, $f''(\theta)$.

5° A quelle condition doit satisfaire la fonction f pour que le plan osculateur à γ en M contienne la normale à S en ce point? Donner toutes les fonctions f répondant à la question, en précisant, pour chacune d'elles, les intervalles ouverts de définition A possibles.

IV

1° α et λ étant deux réels donnés ($\lambda > 0$), on appelle Γ la courbe de l'espace définie par les équations paramétriques :

$$x = \frac{\lambda}{\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)} \cos\theta \ ; \ y = \frac{\lambda \sin\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)} \ ; \ z = \frac{\lambda}{\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)},$$

où θ parcourt l'intervalle $\left]\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2}, \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2}\right[$.

θ_0 et θ_1 étant deux nombres réels tels que :

$$\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2} < \theta_0 < \theta_1 < \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2}$$

on désigne par M_0 et M_1 les points de Γ correspondant respectivement aux valeurs $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$ du paramètre θ. Calculer la longueur de l'arc de Γ d'origine M_0 et d'extrémité M_1.

.../...

2° Soit F l'application de l'ouvert :

$$D = \left]\, 0, +\infty \left[\times \right] \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2}, \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{2} \left[\right.$$

dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$\forall\, (\rho, \theta) \in D$

$$(u, v) = F(\rho, \theta) = \left(\rho \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right), \rho \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)\right).$$

Trouver l'ouvert Δ de $\mathbf{R}^2$ image de D par F. Montrer que F est une bijection de D sur Δ.

3° Σ désignant la portion de la surface S correspondant à $(\rho, \theta) \in D$, déduire des résultats précédents que le changement de paramètres défini par :

$$u = \rho \sin\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right) \qquad v = \rho \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)$$

conduit à un paramétrage admissible Φ de Σ pouvant s'exprimer sous la forme :

$\forall\, (u, v) \in \Delta$, $M = \Phi(u, v) = \varphi_1(u,v)\, i_1 + \varphi_2(u,v)\, i_2 + \varphi_3(u,v)\, i_3$.

On donnera les expressions de $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$, $\varphi_3(u, v)$.

4° Pour tout $M = \Phi(u, v) = G(\rho, \theta)$ sur Σ, on pose :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} = \vec{e}_1 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \vec{e}_2 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \vec{\varepsilon}_1 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \vec{\varepsilon}_2 .$$

Calculer en fonction de u et v :

a. Les composantes de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans la base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$.

b. Les composantes de $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

5° Calculer en fonction de u, v, du, dv, les composantes dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de la différentielle

$$d\vec{M} = du \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + dv \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} .$$

En déduire la valeur de

$$ds^2 = \| d\vec{M} \|^2$$

6° Soient (u_0, v_0) et (u_1, v_0) deux points de Δ tels que $u_0 < u_1$, M_0 et M_1 leurs images par Φ.

A toute fonction numérique g à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, définie et continûment dérivable sur $[u_0, u_1]$ telle que :

$$g(u_0) = g(u_1) = v_0$$

on associe l'arc γ_g d'origine M_0 d'extrémité M_1 d'équations paramétriques

$$x_1 = \varphi_1(u, g(u)) \; ; \quad x_2 = \varphi_2(u, g(u)) \; ; \quad x_3 = \varphi_3(u, g(u))$$

u parcourant $[u_0, u_1]$.

Montrer que l'arc γ_g a pour longueur :

$$L(g) = \sqrt{2} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + g'^2(u)}\, du .$$

Quelle est celle des fonctions g qui correspond au minimum absolu de $L(g)$? En déduire celui des arcs γ_g qui a la plus petite longueur, et donner la valeur correspondante de $L(g)$ en fonction de v_0, θ_0, θ_1, où

$$\theta_0 = \sqrt{2}\left(\alpha + \operatorname{Arc\,tg} \frac{u_0}{v_0}\right) \quad , \quad \theta_1 = \sqrt{2}\left(\alpha + \operatorname{Arc\,tg} \frac{u_1}{v_1}\right) .$$

Comparer ce résultat à celui du IV, 1°.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail